Adam KRYSZTOFIAK
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu
Instytut Inżynierii Rolniczej
e-mail: akrysz@au.poznan.pl

PRICE OPTIMIZATION OF CEREAL HARVESTING FROM POINT OF VIEW OF THE SERVICER

Summary

In the article presented is mathematical model which explains influence of price of services provided in the range of mechanized works in agriculture on the profit of service enterprise. The model concerns the combine cereals harvesting, because this kind of services is most often performed by service enterprises.

OPTYMALIZACJA CENY ZBIORU ZBÓŻ Z PUNKTU WIDZENIA USŁUGODAWCY

Streszczenie

Przedstawiono matematyczny model wyjaśniający wpływ ceny usług świadczonych w zakresie zmechanizowanych prac w rolnictwie na zysk przedsiębiorstwa usługowego. Model ten dotyczy kombajnowego zbioru zbóż, ponieważ ten rodzaj usług wykonywany jest najczęściej przez przedsiębiorstwa usługowe.

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest zwrócenie uwagi na pewien mechanizm wolnorynkowego kształtowania ceny usług maszynowych w rolnictwie. W warunkach gospodarki rynkowej ostatecznym celem działalności przedsiębiorstwa jest uzyskanie największego zysku, na co wpływa wiele czynników. Jednym z nich jest cena towarów lub usług, oferowanych przez przedsiębiorstwo. Ze wzrostem ceny maleje popyt, co może powodować zmniejszenie zysku przedsiębiorstwa, choć niekoniecznie, jeśli zwiększona cena zrekompensuje ten zmniejszony popyt.

Poniżej przedstawiono matematyczny model wyjaśniający wpływ ceny usług świadczonych w zakresie zmechanizowanych prac w rolnictwie na zysk przedsiębiorstwa usługowego. Model ten dotyczy kombajnowego zbioru zbóż, ponieważ ten rodzaj usług wykonywany jest najczęściej przez przedsiębiorstwa usługowe. Przy budowie modelu poczyniono uproszczenia, by jego wywód był klarowny, co czyni zadość zamierzeniu autora, którym było jedynie ogólne zaprezentowanie problemu optymalizacyjnego.

2. Pożądana liczba kombajnów w przedsiębiorstwie usługowym

Załóżmy, że przedsiębiorstwo usługowe będzie wyposażone w jednorodne kombajny do zbioru zbóż w liczbie n. Liczba ta wynika z zależności:

$$n = \frac{S_r}{TW}, \qquad (1)$$

gdzie: S_r [ha] – realna powierzchnia do wykonania zabiegu w danym roku,
T [h] – czas trwania kampanii żniwnej w danym roku,
W [ha/h] – wydajność pracy jednego kombajnu.

Formułując zależność (1) założono dodatkowo, że wydajność pracy W będzie stała, niezależna od gatunku zbieranego zboża i innych warunków.

3. Koszty stałe eksploatacji kombajnów k_{sn}

$$k_{sn} = nk_s \text{ [zł]}, \qquad (2)$$

gdzie: k_{sn} [zł] – koszty stałe eksploatacji kombajnów,
n [-] – liczba kombajnów na wyposażeniu przedsiębiorstwa usługowego,
k_s [zł] – koszty stałe jednego kombajnu.

Biorąc pod uwagę zależność (1) można wzór (2) zapisać następująco:

$$k_{sn} = \frac{k_s}{TW} S_r \text{ [zł]}. \qquad (3)$$

4. Koszty zmienne eksploatacji kombajnów k_{zn}

$$k_{zn} = nk_z T \text{ [zł]}, \qquad (4)$$

gdzie: k_{zn} [zł] – koszty zmienne eksploatacji kombajnów,
k_z [zł/h] – koszty zmienne jednego kombajnu na jedną godzinę jego pracy.
Po uwzględnieniu zależności (1) wzór (4) przybiera następującą postać:

$$k_{zn} = \frac{k_z}{W} S_r \text{ [zł]}. \qquad (5)$$

5. Koszty całkowite eksploatacji kombajnów k_e

Koszty te, będące sumą rocznych kosztów stałych (3) i zmiennych (5), wyniosą:

$$k_e = \frac{k_s}{TW} S_r + \frac{k_z}{W} S_r \text{ [zł]}, \qquad (6)$$

gdzie: k_e [zł] – koszty całkowite eksploatacji kombajnów.

Koszty eksploatacji w odniesieniu do 1 ha powierzchni realnej, $\frac{k_e}{S_r}$, wyrażą się natomiast następująco:

$$k = \frac{k_s}{TW} + \frac{k_z}{W} \text{ [zł/ha]}, \tag{7}$$

gdzie: k [zł/ha] – jednostkowe, na 1 ha realnej powierzchni zbioru, koszty eksploatacji n kombajnów.

6. Zysk jednostkowy i całkowity

Załóżmy, że na dany rok usługodawca ustali dla wszystkich usługobiorców cenę zbioru zbóż z jednego ha na g [zł/ha]. Oczywiście, cena ta musi spełniać warunek $g>k$. Wtedy zysk jednostkowy z tytułu wykonania usługi na 1 ha, z_j, wyniesie:

$$z_j = g - k \text{ [zł/ha]}. \tag{8}$$

Całkowity roczny zysk z_g z tytułu wykonania usług na powierzchni S_r wyniesie natomiast:

$$z_g = gS_r - kS_r \text{ [zł]}. \tag{9}$$

W tym miejscu można postawić pytanie: jak zachowa się całkowity zysk z_g przy wzroście ceny usługi g? Odpowiedź na to pytanie nie wynika jednoznacznie z równania (9), bowiem jest oczywiste, że ze wzrostem ceny g liczba usługobiorców zmaleje i zmniejszy się powierzchnia S_r.

7. Funkcja zysku globalnego

Niech X oznacza zmienną losową wyrażającą największą cenę, jaką jest skłonny zapłacić potencjalny klient (rekrutujący się z obszaru objętego działaniem przedsiębiorstwa usługowego) za zbiór zboża z 1 ha, zaś x [zł/ha] niech oznacza realizacje tej zmiennej losowej (wartości przybierane przez tę zmienną losową z przedziału liczbowego <a, b> - rys.1). Niech dana będzie funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ zmiennej losowej X. Od funkcji tej wymaga się, by była ona generowana powierzchnią usług, nie zaś liczbą obserwacji, co pozostaje w zgodzie z Kołmogorowa aksjomatyczną definicją prawdopodobieństwa.

Oczywistym jest (pod warunkiem $a>k$), że ustalana przez usługodawcę cena usługi g powinna pochodzić z przedziału <a, b>, to znaczy zawierać się między najmniejszą a i największą b ceną x zapłaty, deklarowaną przez usługobiorców. W przypadku ustalenia ceny g pomiędzy wartościami a i b z usługi skorzysta tylko ta część klientów, która jest skłonna zapłacić przynajmniej cenę g (spełnia warunek $x \geq g$) – rys 1. W przypadku tym usługodawca nie wykona usług na całej powierzchni potencjalnej S, co miałoby miejsce przy $g=a$, lecz na realnej powierzchni S_r. Udział powierzchni realnej w powierzchni potencjalnej ilustruje obszar zakreskowany na rys. 1.

Znając funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ można realną powierzchnię usług S_r wyrazić następująco:

$$S_r = S\int_g^b f(x)dx \text{ [ha]}, \tag{10}$$

gdzie: S [ha] – potencjalna powierzchnia usługi (suma powierzchni usług z gospodarstw skłonnych do skorzystania z usługi najwyżej za cenę x zawartą w przedziale <a, b>).

Wprowadzając do równania (9) powierzchnię S_r wyrażoną wzorem (10) otrzymuje się

$$z_g = gS\int_g^b f(x)dx - kS\int_g^b f(x)dx \text{ [zł]}. \tag{11}$$

Po podzieleniu równania (11) obustronnie przez S i wprowadzeniu oznaczenia $z = \frac{z_g}{S}$ funkcja zysku bezwzględnego przybiera następującą postać, unormowaną względem potencjalnej powierzchni S:

$$z = g\int_g^b f(x)dx - k\int_g^b f(x)dx \text{ [zł/ha]}. \tag{12}$$

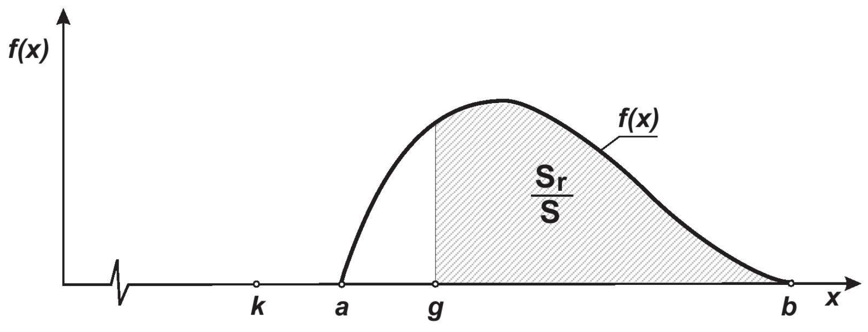
8. Przebieg funkcji *z(g)*

Nie znając szczególnej postaci funkcji $f(x)$ można sformułować jedynie ogólne właściwości zachowania się funkcji $z(g)$, a mianowicie.

A. Funkcja $z(g) \to 0$, gdy $g \to b$,
ponieważ wtedy $\int_g^b f(x)dx \to 0$.

B. Funkcja $z(g) \to a\text{-}k$, gdy $g \to a$,
ponieważ wtedy $\int_g^b f(x)dx \to 1$.

C. W przedziale <a, b> funkcja $z(g)$ będzie zawsze większa od 0, bo w przedziale tym $g\text{-}k>0$ i $\int_g^b f(x)dx > 0$.



Rys. 1. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ jednostkowej ceny zapłaty za usługę deklarowana przez usługobiorców i prawdopodobieństwo wykonania usługi Sr / S
Fig. 1. Function of probability density f(x) of unitary payment price for service declared by service recipient and probability of service performing Sr/S

D. Właściwość A i C upoważnia do sformułowania swoistego warunku wystarczającego istnienia maksimum funkcji *z(g)*: funkcja *z(g)* osiąga w przedziale <*a*, *b*> maksimum lokalne, jeśli okaże się ona rosnąca dla choćby jednej wartości *g* z tego przedziału.

Warunek D można wyrazić nierównością:

$$\frac{dz}{dg} > 0, \tag{13}$$

która po obliczeniu pochodnej $\frac{dz}{dg}$ funkcji (12) przyjmuje postać:

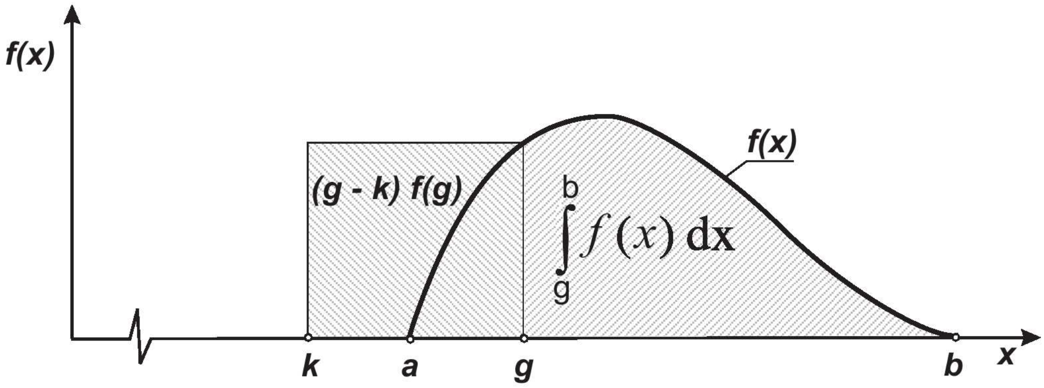
$$(g-k)f(g) < \int_g^b f(x)dx. \tag{14}$$

Graficzną interpretację warunku (14) przedstawiono na rys. 2.

Jeśli spełniony jest warunek wystarczający (13), to cenę usługi g^* maksymalizującą funkcję zysku (12), wyznaczoną na mocy warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji jednej zmiennej, zawiera równanie:

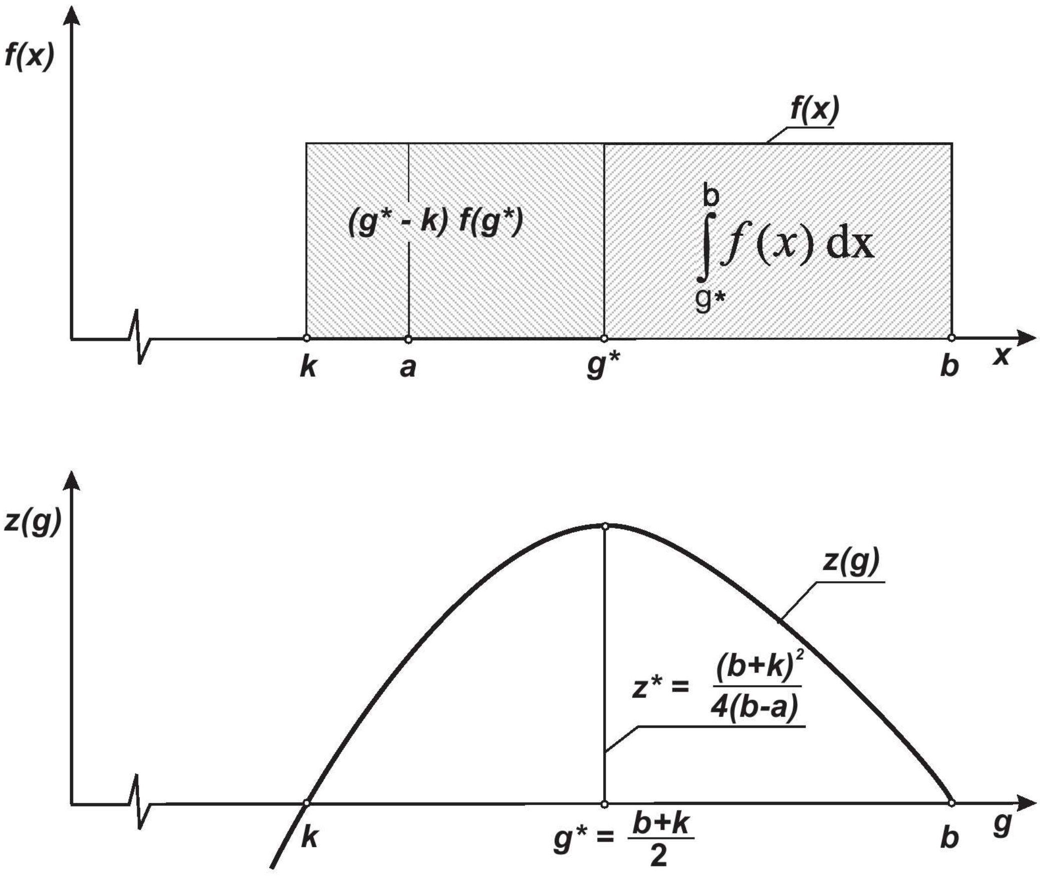
$$(g^*-k)f(g^*) = \int_{g^*}^b f(x)dx. \tag{15}$$

Z równania (15) wynika, że maksimum funkcji zysku (12) wystąpi przy takiej cenie usługi *g*=*g**, przy której zrównują się obie powierzchnie zaznaczone na rys. 2.



Rys. 2. Jeśli powierzchnia $(g-k)f(g)$ jest mniejsza od powierzchni $\int_g^b f(x)dx$, to funkcja *z(g)* ma w przedziale <*a*, *b*> maksimum

Fig. 2. If surface $(g-k)f(g)$ is smaller than surfice $\int_g^b f(x)dx$, so function z(g) has maximumin the range <a, b>



Rys. 3. Jednostajny rozkład gęstości prawdopodobieństwa *f(x)* i odpowiadająca jemu funkcja zysku *z(g)*
Fig. 3. Unitary distribution of probability density f(x) and corresponding with it profit function z(g)

9. Przebieg funkcji *z(g)* gdy zmienna losowa *X* ma rozkład jednostajny

Niech zmienna losowa *X* ma rozkład jednostajny o postaci:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}. \tag{16}$$

Zgodnie z wzorem (12) funkcja *z(g)* przyjmie postać:

$$z(g) = -\frac{1}{b-a} g^2 + \frac{b+k}{b-a} g - \frac{bk}{b-a}. \tag{17}$$

Przebieg funkcji *f(x)* i *z(g)* przedstawiono schematycznie na rys. 3.

Rachunek wykonany według równania (17) kolejno dla $g=a$ i $g=b$ daje wynik $z(a)=a-k$ i $z(b)=0$, co pozostaje w zgodzie odpowiednio z właściwością B i A. Funkcja *z(g)*, dana równaniem (17), ma maksimum, co wynika z właściwości paraboli. Maksimum to przypada przy wartości ceny usługi g^*, która wyznaczona z równania (15) dla jednostajnej funkcji *f(x)* wynosi:

$$g^* = \frac{b+k}{2}. \tag{18}$$

Uwzględniając rezultat (18) w równaniu (17) uzyskuje się następującą wartość z^* maksymalnego zysku:

$$z^* = \frac{(b+k)^2}{4(b-a)}. \tag{19}$$

W rozpatrywanym przykładzie optymalna cena usługi g^* może przyjąć wartość z przedziału $<a, b>$ lub mniejszą od *a*. W pierwszej sytuacji optymalne rozwiązanie jest realne, natomiast w drugiej – funkcja *z(g)* osiąga tylko supremum przy $g=a$, które wyniesie $z_{sup}= a-k$. Warunkiem powstania pierwszej sytuacji jest $b+k \geq 2a$, natomiast drugiej $b+k<2a$. Rys. 3 dotyczy pierwszej sytuacji.

10. Podsumowanie

Przedstawiony model pozwala na sformułowanie następujących ogólnych spostrzeżeń.

a) Wpływ ceny usługi, pochodzącej z przedziału $<a, b>$, na zysk przedsiębiorstwa usługowego może być dwojaki. Ze wzrostem ceny w tym przedziale zysk *z* będzie stale malał, od wartości $z=a-k$ - przy $g=a$, do wartości $z=0$ - przy $g=b$. Uzasadnioną ceną usługi *g* będzie wówczas cena $g=a$, i usługą objęci zostaną wszyscy klienci. Możliwa jest też druga sytuacja, w której ze wzrostem ceny *g* zysk *z* rośnie początkowo, od wartości $z=a-k$, by, po osiągnięciu maksimum przy $g=g^*$, maleć do 0 - przy $z=b$. W tej z kolei sytuacji korzystną z punktu widzenia usługodawcy będzie cena usługi $g=g^*$, przy czym ze względu na jej wysokość (g>a) nie wszyscy klienci skorzystają z usługi.

b) Praktyczne wykorzystanie przedstawionego w zarysie modelu wymaga jego rozwinięcia poprzez uwzględnienie wyposażenia przedsiębiorstwa usługowego w kombajny różniące się wydajnością pracy oraz wpływu gatunku zbieranego zboża, jego plonu jednostkowego, stanu plantacji i innych warunków na wydajność pracy kombajnu danego typu, a także wytworzenia modelu operacyjnego w postaci programu komputerowego ułatwiającego obliczenia.

c) Przedstawione zagadnienie może zostać zdyskretyzowane, to znaczy ciągłą funkcję gęstości prawdopodobieństwa *f(x)* zastąpić można funkcją dyskretną lub wręcz empirycznym rozkładem prawdopodobieństwa.

d) Opracowany model dotyczy sytuacji, gdy $k<a$. W sytuacji $k \in <a, b>$ zachodzić będzie potrzeba przekonstruowania modelu.

e) W przedstawionym modelu ilość pracy wyrażono w hektarach a jednostkową cenę usługi - w złotych na hektar. W analogiczny sposób można zbudować model, w którym ilość pracy i cena usługi będą wyrażone w innych jednostkach, na przykład w godzinach i złotych na godzinę.

f) Po odpowiedniej adaptacji opracowany model może być wykorzystany nie tylko do analizy ceny usług w zakresie kombajnowego zbioru zbóż, lecz również ceny innych usług a także ceny towarów.